“形”中挖“同” “数”中寻“构”

——记“同构思想”在解析几何中的应用

常梨君　金一鸣　（□□□常州□田家炳□□□□　1 3 1）

≥摘

为“ 法”的使用提供 可 .本文探究“ ” 解析几 中的一 妙用,以期拓 ,培 学生抽 和化 的 ,提 .

3 形相似切入,寻找同构点

3.1 同构点 1—— 二次曲线上的两个点在同一条直线上

方向 1 题 1 中由于点 P,Q 坐标的复 性 解析 中 $k_{PQ}=-1$ 的化简较复 ,不如反 而之:设 线 $l_{PQ}:y=kx+m$, 点 P,Q 坐标代入

$$\begin{cases}\dfrac{k_1- k_1+1}{1- k_1}=k\dfrac{- k_1+ k_1-}{1- k_1}+m,\\ \dfrac{k - k +1}{1- k}=k\dfrac{- k + k -}{1- k}+m,\end{cases}$$

化简 $\begin{cases}(+k+m)k_1-(+k)k_1+k-m+1=,\\(+k+m)k -(+k)k +k-m+1=,\end{cases}$

k_1,k 为方程$(+ k+ m)x -(+k)x+ k-m+1=$ 的 个不等实根,

由韦达 理 $k_1+k =\dfrac{+ k}{+ k+ m}=$ $k=-1$.

方向 从点 P,Q 是 线与 曲线的交点, 是 线的交点入 ,“ ”:

联 $\begin{cases}y-1=k_1(x-),\\x - y =\end{cases}$ $x_P=\dfrac{- k_1+ k_1-}{1- k_1}$; 联 $\begin{cases}y-1=k_1(x-),\\y=kx+m\end{cases}$ $x_P=\dfrac{k_1+m-1}{k_1-k}$.

$\dfrac{- k_1+ k_1-}{1- k_1}=\dfrac{k_1+m-1}{k_1-k}$,化简 $(+k+m)k_1-(+k)k_1+k-m+1=$ ①,

理 $(+k+m)k -(+k)k +k-m+1=$ ②,

由①②可 k_1,k 为方程$(+k+m)x -(+k)x+k-m+1=$ 的 个不等实根,

由韦达 理 $k_1+k =\dfrac{+ k}{+ k+ m}=$ $k=-1$.

点评 点 P,Q 的坐标是关于 k_1,k 的 式, 结 ,代入 线 PQ 方程, 个 式,以 k_1,k 为主元整理,抽 出 方程(一元 方程 $f(x)=$),由韦达 理 结果.设 而不 ,避免 .“ 曲线上的 个点 一 线上” 一“形似”,是 式的关键. 点 P,Q 坐标的前提下,“设 线、点代入”和“ ” 一 的 是 点.

3.2 同构点 2—— 两个点在同一条二次曲线上

问题 2 如图 1, 椭 C 的标 方程为 $\dfrac{x}{5}+y=1$,过椭 C 的右 点 F 的 线 l 交椭 于 A,B 点,交 y 于点 M,

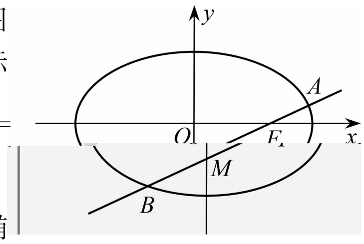


图 1

$\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$,$\overrightarrow{MB}=\lambda \overrightarrow{BF}$, :$\lambda_1+\lambda$ 为 .

常用解法 设 线 $l:x=my+$,$A(x_1,y_1)$,$B(x ,y)$,$M\left(,-\dfrac{}{m}\right)$. 由 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$,$\overrightarrow{MB}=\lambda \overrightarrow{BF}$,坐标化 $\begin{cases}x_1=\lambda_1(-x_1),\\y_1+\dfrac{}{m}=-\lambda_1y_1\end{cases}$ ① 和 $\begin{cases}x =\lambda (-x),\\y +\dfrac{}{m}=-\lambda y\end{cases}$ ②.目标 向 λ 用 y 表示,

$\lambda_1+\lambda =\left(-1-\dfrac{}{my_1}\right)+\left(-1-\dfrac{}{my}\right)=- -\dfrac{(y_1+y)}{my_1y}$,联 线 l 与椭 方程消 x,$(m +5)y + my-1=$,由韦达 理代入,$\lambda_1+\lambda =-1$.

用“ ”解答呢? 们作如下联 :① 由“$\lambda_1+\lambda$ ”联 ?(韦达 理)→② 如 λ 的 方程? →③ 题中有 式吗?(椭 方程)→④ 如 方程?(点 A,B 椭 上)→⑤ 如 A,B 坐标?(上述方程①② 中用 λ 表示 x,y).

略解如下: 由方程 ①② $A\left(\dfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1},\dfrac{-}{m(1+\lambda_1)}\right)$,$B\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda},\dfrac{-}{m(1+\lambda)}\right)$.

A,B 代入椭 方程

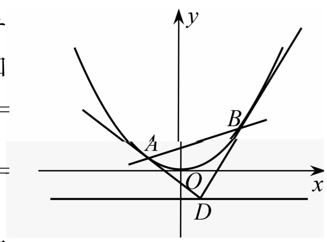
$$\begin{cases}\dfrac{\lambda_1}{5(1+\lambda_1)}+\dfrac{}{m (1+\lambda_1)}=1,\\ \dfrac{\lambda}{5(1+\lambda)}+\dfrac{}{m (1+\lambda)}=1,\end{cases}$$ 化 简

$\begin{cases} m\ \lambda_1+1\ m\ \lambda_1+5m\ -\ \ =\ , \\ m\ \lambda\ \ +1\ m\ \lambda\ \ +5m\ -\ \ =\ , \end{cases}$ 则 λ_1,λ 是方程 $m\ x\ \ +1\ m\ x+5m\ -\ \ =$ 的两根,由韦达定理得 $\lambda_1+\lambda\ =-1$.

点评 线 MF 上的点 A,B(坐标结构相同)在 曲线(椭)上,这是形似,以 λ 为主元构 出同构方程. 此法摆 了“ 线与椭 相交、联立、韦达定理”的固化思维,同构式以 λ 的新视 研究问题,不仅减少了大量运 ,也彰显了思维的整体性和 性.

3.3 同□点3——两条□线与二□曲线□相同位置□□

□□3 (1 年全国卷 理 1题)如图 ,曲线 $C:y=\frac{1}{}x$,D 为 线 $y=-\frac{1}{}$ 上的点,过 D 作曲线 C 的两 线, 点分别为 A,B. 明: 线 AB 过定点.



图

略解 设 $D\left(t,-\frac{1}{}\right)$,$l_{AD}:y+\frac{1}{}=k_1(x-t)$,联立 $\begin{cases} y+\frac{1}{}=k_1(x-t), \\ y=\frac{1}{}x \end{cases}$ 消 y,得 $x\ -\ k_1x+\ k_1t+1=$ (*).

为 线 AD 与抛物线 于点 A,所以 $\Delta=\ k_1-(\ k_1t+1)=\ k_1\ -\ k_1t-\ =\ .$ 方程 有唯一根 $x_A=k_1$,即点 $A\left(k_1,\frac{1}{}k_1\right)$.

同理 线 BD 与抛物线相 于点 B,可得 $\Delta=\ k\ -\ k\ t-\ =\ $,$B\left(k\ ,\frac{1}{}k\ \right)$. 从而 $k_{AB}=\frac{\frac{1}{}k\ -\frac{1}{}k_1}{k\ -k_1}=\frac{k\ +k_1}{}$,$l_{AB}:y\ -\ \frac{k_1}{}=\frac{k\ +k_1}{}(x-k_1)$,即 $y=\frac{k\ +k_1}{}x-\frac{k_1k}{}$.

为 $\begin{cases} k_1-\ k_1t-\ =\ , \\ k\ -\ k\ t-\ =\ , \end{cases}$ 即 k_1,k 是方程 $x\ -\ tx-\ =$ 的两根,由韦达定理 $\begin{cases} k_1+k\ =t, \\ k_1\cdot k\ =-1 \end{cases}$ 得 $l_{AB}:y=tx+\frac{1}{}$, 定点为 $\left(\ ,\frac{1}{}\right)$.

点评 这是抛物线中的阿基米德三 形,以极点(焦点)、极线(准线)为载体,“联立 线与 锥曲线,消元,由相 得 $\Delta=$ ”,是判定 线与 锥曲线相 的通法. 两 线得到的两个判别式恰为关于 k_1,k 的同构式,采用整体消元,简化运 .

3.4 同□点4——两条□线过同一个点

看问题 ,开口向上的抛物线的 线问题,还可以用导数法解决.

略解 $A(x_1,y_1)$,$B(x\ ,y\ )$,$y'=x$,$k_{AD}=x_1$,$k_{BD}=x$,则 $l_{AD}:y-y_1=x_1(x-x_1)$,$l_{BD}:y-y\ =x\ (x-x\ )$. 点 $D\left(t,-\frac{1}{}\right)$ 代入两 线方程得 $\begin{cases} -\frac{1}{}-y_1=x_1(t-x_1), \\ -\frac{1}{}-y\ =x\ (t-x\ ), \end{cases}$ 化简 $\begin{cases} x_1t-x_1+y_1+\frac{1}{}=\ , \\ x\ t-x\ +y\ +\frac{1}{}= \end{cases}$ (**

$b)(y-b)=r$.

( ) 自椭圆C:$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>b>)$□□□$P(x ,y)$□椭圆$C$□切□,切□□$A,B$,则切□弦$AB$ □□□□:$\frac{xx}{a}+\frac{yy}{b}=1$.

(3) 自双曲□ C:$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ □□□ $P(x ,y)$□双曲□ C □切□,切□□ A,B,则切□弦 AB □□□□:$\frac{xx}{a}-\frac{yy}{b}=1$.

4 总结内化,提升素养

4.1 “同构法”解题的流程

根据□述三个例子,□□概□□□□“同构□”□□□□□□□:

□(□□)满足□□共□征→构造“同构”→确定□□→抽象母□□→求□□□.

“同构□”□□□□□何□征□形似,抽象□代□□□同构,利□“整□消□”□决问□.□□在□决问□□过□□,□了同构□什么,同构能□决什么问□.同时,“确定□□”□□□□□择很□要,需要视问□□需要而定,□□□斜□、参□□坐□□.“同□形□、构□□涵”,思想□□□□变带□了低阶□□运算□□□□□,令人拍案叫绝,□□□□阶□□运算□□升很□裨□.同时,同构□也□现了□□□□称美